Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Eerste- en derdegraadsfunctie

1 maximumscore 4

- Aangetoond moet worden dat $f'(0) = g'(0)$ — 1
- $f'(x) = 2x \cdot (x - 1\frac{1}{2}) + (x^2 - 1) \cdot 1$ — 1
- $f'(0) = -1$ — 1
- $g'(x) = -1$, dus $g'(0) = -1$ (dus de grafieken van f en g raken elkaar in A) — 1

2 maximumscore 6

- De grafiek van f snijdt de x-as tussen O en B in $(1, 0)$ — 1
- De oppervlakte van het linkerdeel is $\int_0^1 (x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2})\mathrm{d}x$ — 1
- $(x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2}) = x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}$ — 1
- Een primitieve van $x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}$ is $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x$ — 1
- De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}$ — 1
- De oppervlakte van het rechterdeel is $\frac{1}{2} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (en dat is de helft van de oppervlakte van het linkerdeel) — 1

3 maximumscore 4

- ($h(x) = \dfrac{-\left(x - 1\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2 - 1\right)\left(x - 1\frac{1}{2}\right)}$ dus) $h(x) = \dfrac{-1}{x^2 - 1}$ (voor $x \neq 1\frac{1}{2}$) — 1
- $\dfrac{-1}{\left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \dfrac{-1}{1\frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}$, dus de perforatie is $(1\frac{1}{2}, -\frac{4}{5})$ — 1
- ($x^2 - 1 = 0$ geeft $x = -1$ of $x = 1$, dus) de verticale asymptoten hebben vergelijkingen $x = -1$ en $x = 1$ — 1
- ($\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-1}{x^2 - 1} = 0$, dus) de horizontale asymptoot heeft vergelijking $y = 0$ — 1

Verzadigingsgraad van hemoglobine

4 maximumscore 3

- De vergelijking $75 = \dfrac{100p^3}{p^3 + 25000}$ moet worden opgelost — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 42 (mmHg) — 1

of

- De vergelijking $75 = \dfrac{100p^3}{p^3 + 25000}$ moet worden opgelost — 1
- $75 = \dfrac{100p^3}{p^3 + 25000}$ geeft $100p^3 = 75p^3 + 1875000$ — 1
- $25p^3 = 1875000$ geeft $p^3 = 75000$, dus $p = \sqrt[3]{75000} \approx 42$ (mmHg) — 1

5 maximumscore 4

- $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} = \dfrac{300p^2(p^3 + 25000) - 100p^3 \cdot 3p^2}{(p^3 + 25000)^2}$ (dus $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} = \dfrac{7500000p^2}{(p^3 + 25000)^2}$) — 2
- Beschrijven hoe de waarde van p waarvoor $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}$ maximaal is, kan worden bepaald — 1
- Het antwoord: 23 — 1

of

- $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} = \dfrac{300p^2(p^3 + 25000) - 100p^3 \cdot 3p^2}{(p^3 + 25000)^2}$ (dus $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} = \dfrac{7500000p^2}{(p^3 + 25000)^2}$) — 2
- $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}p^2} = \dfrac{15000000p \cdot (p^3 + 25000)^2 - 7500000p^2 \cdot 6p^2(p^3 + 25000)}{(p^3 + 25000)^4}$ — 1
- Algebraïsch of met GR $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}p^2} = 0$ oplossen geeft het antwoord 23 (want uit de grafiek blijkt dat de afgeleide voor deze waarde van p maximaal is) — 1

6 maximumscore 4

- Uit $\dfrac{v}{100 - v} = 0{,}00004p^3$ volgt $v = 0{,}00004p^3(100 - v)$ — 1
- Dit geeft $25000v = 100p^3 - vp^3$ — 1
- Hieruit volgt $25000v + vp^3 = 100p^3$ — 1
- Daaruit volgt $v(25000 + p^3) = 100p^3$, dus $v = \dfrac{100p^3}{p^3 + 25000}$ — 1

Vermenigvuldigen in horizontale en verticale richting

7 maximumscore 4

- Vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met e geeft de grafiek met vergelijking $y = \mathrm{e} \cdot \frac{1+\ln x}{x}$ 1
- Deze vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{\mathrm{e}}$ geeft de grafiek met vergelijking $y = \mathrm{e} \cdot \frac{1+\ln(\mathrm{e}x)}{\mathrm{e}x}$ 1
- $\mathrm{e} \cdot \frac{1+\ln(\mathrm{e}x)}{\mathrm{e}x} = \frac{1+\ln \mathrm{e} + \ln x}{x}$ 1
- $c = 1 + \ln \mathrm{e} = 2$ 1

of

- Op de grafiek van f ligt het punt $(1, 1)$ 1
- Het beeld van dit punt na de twee vermenigvuldigingen is $(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$ 1
- Dit punt ligt op de grafiek van g_c als $\mathrm{e} = \frac{c + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}$ 1
- $c + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1$ geeft $c = 2$ 1

8 maximumscore 4

- De oppervlakte is $\int_1^{\mathrm{e}} (g_3(x) - f(x))\mathrm{d}x$ 1
- $g_3(x) - f(x) = \frac{3+\ln x}{x} - \frac{1+\ln x}{x} = \frac{2}{x}$ 1
- Een primitieve van $\frac{2}{x}$ is $2\ln x$ 1
- De oppervlakte is $2\ln \mathrm{e} - 2\ln 1 = 2$ 1

Twee vierkanten tegen een driehoek

9 maximumscore 3

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-p \\ -q \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{AD}$ is het beeld van $\overrightarrow{AB}$ bij een rotatie over een hoek van $90°$ linksom, dus $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} q \\ 2-p \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 2-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}$ 1

of

- $y_D = y_A + (y_D - y_A) = y_A + (x_B - x_A)$ 1
- Dus $y_D = q + (2-p) = 2 - p + q$ 1
- Evenzo $x_D = x_A + (x_D - x_A) = p + q$ (dus $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}$) 1

10 maximumscore 4

- $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ q \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2p \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} p-1 \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2p \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ED} = 2pq - 2q + 2q - 2pq = 0$, dus MA staat loodrecht op ED 1

of

- De richtingscoëfficiënt van ED is $\dfrac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \dfrac{(2-p+q)-(p+q)}{(p+q)-(p-q)} = \dfrac{1-p}{q}$ 2
- De richtingscoëfficiënt van AM is $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{-q}{1-p}$ 1
- Het product van deze richtingscoëfficiënten is -1 (dus MA staat loodrecht op ED) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Een hartvormige kromme

11 maximumscore 6

- $x'(t) = -2\sin t + 2\sin(2t)$ — 1
- $y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t)$ — 1
- $v = \sqrt{\left(-2\sin t + 2\sin(2t)\right)^2 + \left(2\cos t - 2\cos(2t)\right)^2}$ — 1
- Hieruit volgt $v = \sqrt{8 - 8\left(\sin t \cdot \sin(2t) + \cos t \cdot \cos(2t)\right)}$ — 1
- Dus $v = \sqrt{8 - 8\cos(2t - t)} = \sqrt{8 - 8\cos t}$

  (of: $v = \sqrt{8 - 8\left(\sin t \cdot 2\sin t\cos t + \cos t \cdot \left(1 - 2\sin^2 t\right)\right)} = \sqrt{8 - 8\cos t}$) — 1
- De maximale snelheid is $\sqrt{8 - 8 \cdot -1} = 4$ — 1

12 maximumscore 6

- De vergelijking $2\cos t - \cos(2t) = 1$ moet worden opgelost — 1
- Dit geeft $2\cos t - (2\cos^2 t - 1) = 1$ — 1
- Hieruit volgt $\cos t - \cos^2 t = 0$ — 1
- Dus $\cos t = 0$ of $\cos t = 1$ — 1
- Dit geeft $t = 0$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 2\pi$ — 1
- $y(\frac{1}{2}\pi) = 2$ (of $y(1\frac{1}{2}\pi) = -2$), dus $a = 2$ — 1

Opmerking
Als de vergelijking $2\cos t - \cos(2t) = 1$ niet algebraïsch maar met de GR is opgelost, voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.

De leeftijd van ons zonnestelsel

13 maximumscore 3

- Voor de halveringstijd t geldt $\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ — 1
- Hieruit volgt $-\lambda t = \ln\frac{1}{2}$ — 1
- $t = \dfrac{\ln\frac{1}{2}}{-\lambda} = \dfrac{\ln\frac{1}{2}}{-1{,}42\cdot 10^{-11}}$, dus de gevraagde tijd is (ongeveer) 49 miljard (of $4{,}9\cdot 10^{10}$) (jaar) — 1

14 maximumscore 3

- Uit $a(t)+b(t)=a(0)+b(0)$ volgt $a(t)+b(t)-a(0)=b(0)$ — 1
- Uit $a(t)=a(0)\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t}$ volgt $a(0)=a(t)\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}$ — 1
- Dus $a(t)+b(t)-a(t)\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}=b(0)$, ofwel $b(t)+\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)a(t)=b(0)$ — 1

of

- $b(t)+\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)a(t)=a(0)+b(0)-a(t)+\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)a(t)$ — 1
- $a(0)+b(0)-a(t)+\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)a(t)=a(0)+b(0)-a(t)\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}$ — 1
- $a(0)+b(0)-a(t)\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}=a(0)+b(0)-a(0)\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}=b(0)$ (dus $b(t)+\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)a(t)=b(0)$) — 1

15 maximumscore 4

- Invullen van de tabelgegevens geeft $0{,}739+\left(1-\mathrm{e}^{1{,}42\cdot 10^{-11}\cdot t}\right)0{,}60=b(0)$ en $0{,}713+\left(1-\mathrm{e}^{1{,}42\cdot 10^{-11}\cdot t}\right)0{,}20=b(0)$ — 1
- (Omdat $b(0)$ voor elke meteoriet hetzelfde is, geldt) $0{,}739-\left(\mathrm{e}^{1{,}42\cdot 10^{-11}\cdot t}-1\right)0{,}60=0{,}713-\left(\mathrm{e}^{1{,}42\cdot 10^{-11}\cdot t}-1\right)0{,}20$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 4 miljard (of $4\cdot 10^{9}$) (jaar) — 1

Raakcirkel en raaklijnen

16 maximumscore 6

- Een vergelijking van c_3 heeft de vorm $x^2 + (y-m)^2 = r^2$ 1
- c_3 raakt c_1 dus $r = m - 3$ 1
- c_3 raakt c_2 dus $r = \sqrt{m^2 + 225} - 12$ 1
- $\sqrt{m^2 + 225} - 12 = m - 3$ geeft $\sqrt{m^2 + 225} = m + 9$ 1
- Hieruit volgt $m^2 + 225 = m^2 + 18m + 81$, dus $m = 8$ 1
- $r = 5$, dus een vergelijking van c_3 is $x^2 + (y-8)^2 = 25$ 1

of

- De middelpunten van de cirkels zijn de hoekpunten van een rechthoekige driehoek 1
- In deze driehoek geldt $(r+3)^2 + 15^2 = (r+12)^2$, met r de straal van c_3 1
- $r^2 + 6r + 9 + 225 = r^2 + 24r + 144$ 1
- Hieruit volgt $r = 5$ 1
- Dus het middelpunt van c_3 heeft coördinaten $(0, 8)$ 1
- Een vergelijking van c_3 is $x^2 + (y-8)^2 = 25$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

17 **maximumscore 8**

- Een van de gemeenschappelijke raaklijnen heeft vergelijking $x = 3$ — 1
- De andere gemeenschappelijke raaklijnen gaan door $(-k, 0)$ — 1
- Uit gelijkvormige driehoeken volgt $\frac{k}{3} = \frac{k+15}{12}$ — 2
- Hieruit volgt $k = 5$ — 1
- Een vergelijking voor de gemeenschappelijke raaklijn heeft de vorm $y = a(x+5)$ — 1
- $a = \pm\tan\varphi = \pm\frac{3}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \pm\frac{3}{4}$, waarbij φ de richtingshoek van de raaklijn is — 1
- Vergelijkingen zijn $y = \frac{3}{4}(x+5)$ en $y = -\frac{3}{4}(x+5)$ — 1

of

- Een van de gemeenschappelijke raaklijnen heeft vergelijking $x = 3$ — 1
- De andere gemeenschappelijke raaklijnen hebben een vergelijking van de vorm $y = ax + b$, dus $ax - y + b = 0$ — 1
- De lijn raakt c_1 en c_2 als $\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} = 3$ en $\frac{|15a+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 12$ — 2
- Hieruit volgt $4 \cdot |b| = |15a + b|$ — 1
- $15a + b = 4b$ of $15a + b = -4b$, dus $b = 5a$ of $b = -3a$ — 1
- $\frac{|-3a|}{\sqrt{a^2+1}} = 3$ geeft $a^2 = a^2 + 1$, en dat heeft geen oplossing — 1
- $\frac{|5a|}{\sqrt{a^2+1}} = 3$ geeft $25a^2 = 9(a^2+1)$, dus $a = \pm\frac{3}{4}$, met raaklijnen $y = \frac{3}{4}(x+5)$ en $y = -\frac{3}{4}(x+5)$ — 1